



Système d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues

Définitions

On appelle système d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues x et y deux équations du 1^{er} degré qui ont un couple solution commun (s'il existe) :

- ❶ $ax + by = c$
- ❷ $a'x + b'y = c'$

Exemple :

- ❶ $x + 3y = 9$
- ❷ $-2x + 2y = -2$

L'équation ❶ possède une infinité de couples solutions.

L'équation ❷ possède une infinité de couples solutions.

Résoudre le système des équations ❶ et ❷, c'est chercher s'il existe un couple solution à la fois de l'équation ❶ et de l'équation ❷.

Il existe plusieurs méthodes de résolution : la méthode *graphique* et deux méthodes algébriques, la méthode par *substitution* et la méthode par *combinaison* (ou soustraction ou encore addition).

La méthode *graphique*

Il faut calculer au moins 2 points (2 couples solutions) de chacune des équations (qui sont des droites).

- ❶ $x + 3y = 9$ droite **D1**

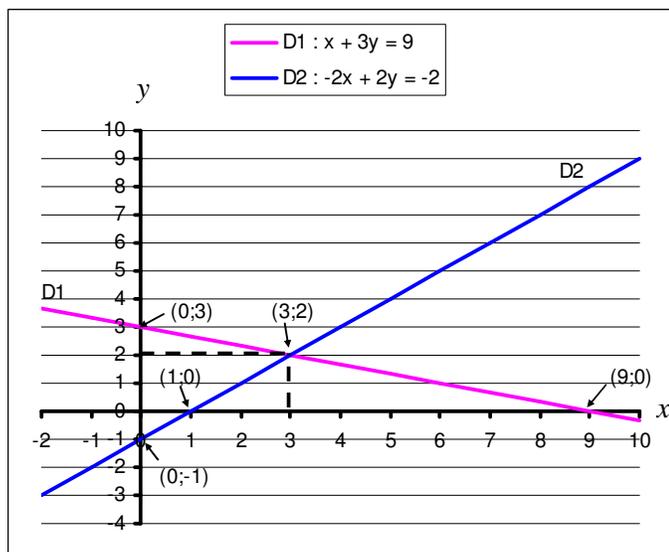
Si $y = 0$ alors $x = 9 \Rightarrow$ 1^{er} point (9;0)

Si $x = 0$ alors $y = 3 \Rightarrow$ 2^e point (0;3)

- ❷ $-2x + 2y = -2$ droite **D2**

Si $y = 0$ alors $x = 1 \Rightarrow$ 1^{er} point (1;0)

Si $x = 0$ alors $y = -1 \Rightarrow$ 2^e point (0;-1)



En traçant les droites D1 et D2 on trouve le point d'intersection (3;2) qui est le couple solution de ce système d'équations.

La méthode par *substitution*

Reprenons notre exemple :

- ❶ $x + 3y = 9$
- ❷ $-2x + 2y = -2$

Cette méthode consiste à écrire dans une équation une des deux inconnues avec son égalité de l'autre équation, pour n'avoir plus qu'une seule inconnue.

Méthode	Application
Choisir l'une des deux équations Par exemple l'équation 2)	2) $-2x + 2y = -2$
↓	↓
Ecrire l'équation choisie sous la forme : $y = ax + b$	$2y = 2x - 2$ $y = x - 1$
↓	↓
Remplacer y par $ax + b$ dans l'autre équation	❶) $x + 3y = 9$ devient $x + 3(x - 1) = 9$
↓	↓
Calculer x	$x + 3x - 3 = 9$ $4x = 12$ donc $x = 3$
↓	↓
Remplacer x par la valeur trouvée dans l'expression $y = ax + b$ Déduite de l'équation 2)	$y = 3 - 1$
↓	↓
Calculer y	$y = 2$
↓	↓
Vérifier que le couple solution trouvé fonctionne dans l'autre équation en remplaçant x et y par les valeurs trouvées.	❶) $x + 3y = 9$ devient $3 + 3 \times 2 = 3 + 6$ qui est bien égale à 9

Remarque : il est indifférent de choisir l'équation 1) ou l'équation 2) au départ. Le résultat est identique. On cherchera à avoir les calculs les plus simples possibles dans le choix de l'équation de départ.

La methode par *combinaison*

Reprenons notre exemple :

① $x + 3y = 9$

② $-2x + 2y = -2$

Cette methode consiste à eliminer une des deux inconnues par soustraction des deux equations apres avoir passe l'inconnue à eliminer au même coefficient.

Methode

Former un nouveau systeme.
Multiplier ① par le coefficient de x dans l'equation ②).
Multiplier ② par le coefficient de x dans l'equation ①).



Faire la soustraction des deux equations obtenues membre à membre.



Calculer y



Remplacer y par la valeur trouvee dans une des deux equations



Verifier que le couple solution trouve fonctionne dans l'autre equation en remplaçant x et y par les valeurs trouvees.

Application

① $x + 3y = 9$

② $-2x + 2y = -2$

l'equation ① est multipliee par -2

① $-2x - 6y = -18$

② $-2x + 2y = -2$

On va eliminer x



$-2x - 6y = -18$

$\underline{-(-2x + 2y = -2)}$

$-8y = -16$



$y = 2$



① $x + 3y = 9$

$x + 3 \times 2 = 9$

$x = 9 - 6$

$x = 3$



② $-2x + 2y = -2$ devient
 $-2 \times 3 + 2 \times 2 = -6 + 4$
qui est bien egale à -2

Applications concrètes

Application 1

Un éleveur veut alimenter les porcs de son élevage au coût le plus bas. Il peut fabriquer un aliment fermier au prix de 0,30 € le kilogramme, mais n'en disposant pas suffisamment, il a acheté de l'aliment du commerce (de composition comparable) au prix de 0,40 € le kilogramme et a effectué un mélange dont le prix est de 0,33 €/kg.

Dans quelles proportions l'éleveur a-t-il effectué son mélange ?

Pour résoudre ce problème, vous devrez poser et résoudre le système d'équations permettant de déterminer la quantité x d'aliment fermier et la quantité y d'aliment du commerce contenues dans un kilogramme de mélange.

1- Poser le système d'équations

Il faut une quantité x d'aliment fermier et une quantité y d'aliment du commerce pour faire un kg de mélange.

On peut écrire : **1)** $x + y = 1$

Il faut une quantité x d'aliment fermier à 0,30 €/kg et une quantité y d'aliment du commerce à 0,40 €/kg pour faire 1 kg de mélange à 0,33 €/kg.

On peut écrire : **2)** $0,3x + 0,4y = 0,33$

Le système est donc :

1) $x + y = 1$

2) $0,3x + 0,4y = 0,33$

2- Résoudre le système d'équations

Méthode par combinaison

Je multiplie **1)** par 0,3

1) devient : $0,3x + 0,3y = 0,3$

On soustrait **2)** à **1)** membre à membre

$0x + 0,1y = 0,03$

$y = \frac{0,03}{0,1} = 0,3$: **$y = 0,3$**

Méthode par substitution

1) devient $x = 1 - y$

x que je remplace par son égalité dans **2)**

$0,3(1 - y) + 0,4y = 0,33$

$0,3 - 0,3y + 0,4y = 0,33$

$0,1y = 0,03$

$y = \frac{0,03}{0,1} = 0,3$: **$y = 0,3$**

On reprend l'équation **1)** en remplaçant y par la valeur trouvée

1) $x = 1 - y = 1 - 0,3 = 0,7$: **$x = 0,7$**

Vérification avec l'équation **2)** $0,3x + 0,4y = 0,33$ en remplaçant x et y par les valeurs trouvées $0,3 \times 0,7 + 0,4 \times 0,3 = 0,21 + 0,12 = 0,33$ (on retrouve bien le résultat de l'équation **2)**).

Donc dans **1 kg** de mélange,
il y a **0,3 kg** (30 %) d'aliment du commerce (y)
et **0,7 kg** (70 %) d'aliment fermier (x).

Methode **graphique** (calculons 2 points par droite/equation)

Pour l'equation **1)** $x + y = 1$

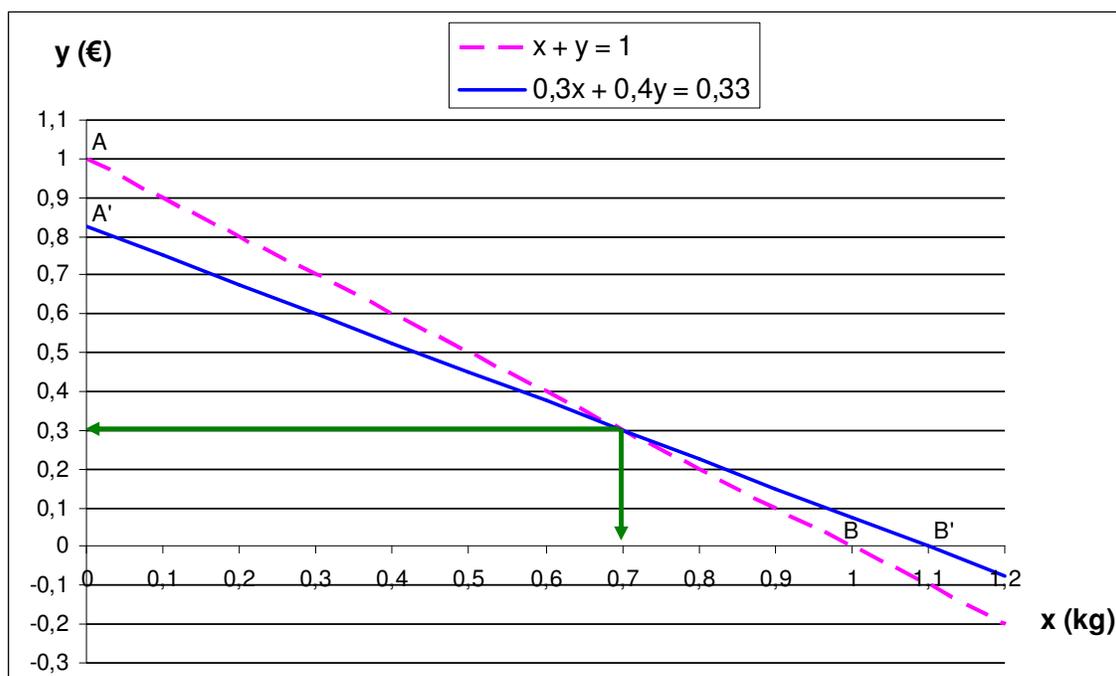
1^{er} point : si $x = 0$ alors $y = 1$ point $A(0;1)$

2^e point : si $y=0$ alors $x = 1$ point $B(1;0)$

Pour l'equation **2)** $0,3x + 0,4y = 0,33$

1^{er} point : si $x = 0$ alors $y = 0,33/0,4 = 0,826$ point $A'(0;0,826)$

2^e point : si $y=0$ alors $x = 0,33/0,3 = 1,1$ point $B'(1,1;0)$



L'intersection des deux droites est la solution du systeme, ici le couple (0,7;0,3).

Application 2

Une personne souhaite acheter une voiture, elle hésite entre un véhicule essence et un véhicule diesel. Le tableau suivant donne le coût d'utilisation à l'année :

Coût/an	Essence	Diesel
Charges fixes	3600 €	4400 €
Charges variables (par km)	0,48 €/km	0,40 €/km

Charges fixes : Assurance, emprunt, amortissement.

Charges variables : Entretien, carburant.

Calculer le kilométrage pour lequel le véhicule essence et le véhicule diesel engendrent le même coût.

Pour cela on pose x = nombre de kilomètres parcourus dans l'année, y = le coût total à l'année

1) Poser le système d'équations

Essence ❶	Diesel ❷
$y = 0,48x + 3600$	$y = 0,40x + 4400$

❶ $y = 0,48x + 3600$

❷ $y = 0,40x + 4400$

2) Résoudre le système d'équations

Méthode par *substitution*

On remplace y de ❷ par son égalité en ❶ donc

$$0,48x + 3600 = 0,40x + 4400$$

$$0,48x - 0,40x = 4400 - 3600$$

$$0,08x = 800$$

$$x = 800/0,08$$

$$x = \mathbf{10\ 000\ km}$$

soit un coût à l'année de $y = 0,48 \cdot 10\ 000 + 3600 = \mathbf{8400,00\ €}$

Vérification avec l'autre équation : $y = 0,40 \cdot 10\ 000 + 4400 = 8400,00\ € \Rightarrow \text{OK !}$

Méthode *graphique* (calculons 2 points par droite/équation)

Pour l'équation ❶) $y = 0,48x + 3600$

1^{er} point : si $x = 0$ alors $y = 3600$ point $A(0;3600)$

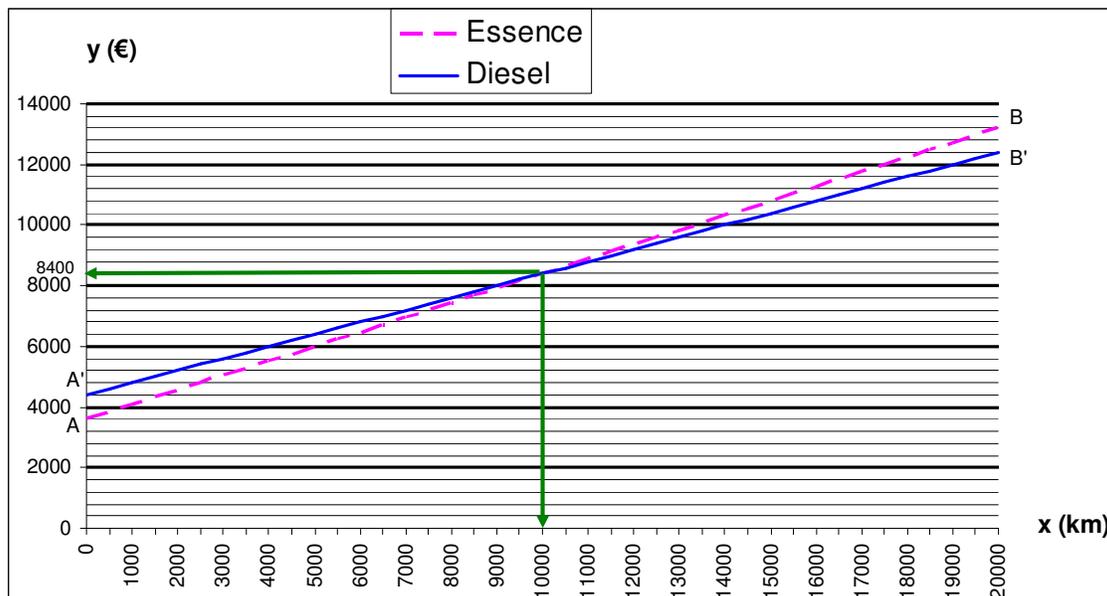
2^e point : si $x = 20000$ alors $y = 0,48 \cdot 20\ 000 + 3600 = 13200$ point $B(20000;13200)$

Systemes d'equations

Pour l'equation 2) $y = 0,40x + 4400$

1^{er} point : si $x = 0$ alors $y = 4400$ point $A'(0;4400)$

2^e point : si $x = 20000$ alors $y = 0,40 \times 20000 + 4400 = 112400$ point $B'(20000;12400)$



L'intersection des deux droites est la solution du systeme, ici le couple (10000;8400).

Nous pouvons ensuite choisir le vehicule en fonction du kilometrage parcouru dans l'annee. Si on ne depasse pas 10 000 km par an, on peut se contenter du vehicule essence, par contre si on depasse les 10 000 km par an, on preferera le vehicule diesel.